Problemes

En el número anterior de la *SCM/Notícies* fèiem festa grossa perquè havíem arribat a proposar el problema centè. En aquest número, gràcies a la valuosíssima i desinteressada feina dels nostres lectors, en publiquem la solució. Però això no completa la festa perquè, tot i que són cent els enunciats proposats, només són noranta-vuit les solucions rebudes (i publicades). En efecte, el problema **B47**, un enunciat de geometria esfèrica amb caire d'homenatge personal, i l'**A64**, publicats a la *SCM/Notícies*14 i 20, respectivament, encara no han estat resolts.

La vida segueix, però, i ara proposem quatre problemes més, dos dels quals provenen dels nostres fidels col·laboradors José Luis Díaz-Barrero i Xavi Ros Otón, tots dos de la UPC, Barcelona.

Del mateix Xavi Ros és la solució que publiquem del problema **A97**, l'única rebuda. Del problema **A98** n'hem rebudes dues: una del mateix Xavi Ros i l'altra, que publiquem, d'en Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva. Amb el problema **A99** hem tingut menys sort i no n'hem rebut cap solució correcta, cosa que ens ha portat a publicar la solució donada pel mateix proponent. Finalment, en Joaquim Nadal i Vidal aporta l'única solució rebuda del problema **A100**. A tots ells, proponents i resolutors, moltíssimes gràcies!

Acabem aquest exordi tot recordant-vos que, si treballeu amb TEX o LaTEX, ens feu força més planera la feina d'elaborar aquesta secció, tot i que aportacions en qualsevol altre format, també manuscrits, són igualment ben rebudes. Les adreces de correu per enviar-nos-les són cromero@xtec.cat o bé carles.romero.c@gmail.com. Fins aviat!

Problemes proposats

A101. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Siguin a, b i c tres nombres positius amb $ab + bc + ca = 1$. Demostreu que

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^4\left(a^2\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\right.$$
$$\left.+\,b^2\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+c^2\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}\right)^3\geq\frac{1}{2}\,.$$

A102. (D'una olimpíada de fa molts, molts anys.) Sigui a un nombre real fixat i sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció que compleix

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$$

per tot nombre real x. Demostreu que f és una funció periòdica i doneu-ne un exemple pel cas $a = 1$.

A103. (Proposat per Xavi Ros Otón, FME-UPC.) Siguin R i r els radis de les circumferències inscrita i circumscrita a un triangle. Proveu que

$$\frac{R}{2r}\geq\frac{A}{H}\,,$$

expressió en què A i H representen, respectivament, la mitjana aritmètica i la mitjana harmònica dels costats del triangle.

A104. (Proposat per la redacció.) Tenim un quadrilàter en el pla i construïm quadrats sobre els seus costats a l'exterior d'aquest quadrilàter. Demostreu que els segments que uneixen els centres de quadrats construïts sobre costats oposats del quadrilàter són perpendiculars i de la mateixa longitud.

Solucions

A97. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Siguin a, b i c les longituds dels costats d'un cert triangle $\triangle ABC$ amb r i R com a radis respectius de les circumferències inscrita i circumscrita en aquest triangle. Demostreu que

$$\frac{a+b}{c^3+abc}+\frac{b+c}{a^3+abc}+\frac{c+a}{b^3+abc}>\frac{1}{r^2+R^2}\,.$$

Solució: (Solució de Xavi Ros Otón, FME-UPC.) A continuació demostrarem que

$$\frac{a+b}{c^3+abc}+\frac{b+c}{a^3+abc}+\frac{c+a}{b^3+abc}\geq\frac{1}{R^2}$$

és una desigualtat més forta que la de l'enunciat.

Demostrarem en primer lloc que, si $X\geq Y\geq Z$ i $X'\leq Y'\leq Z'$, aleshores

$$\frac{X}{X'}+\frac{Y}{Y'}+\frac{Z}{Z'}\geq 3\,\frac{X+Y+Z}{X'+Y'+Z'}\,. \qquad (1)$$

Multiplicant la desigualtat per $X'+Y'+Z'$ veiem que és equivalent a

$$\frac{X}{X'}(-2X'+Y'+Z')+\frac{Y}{Y'}(X'-2Y'+Z')+ \\ +\frac{Z}{Z'}(X'+Y'-2Z')\geq 0\,. \qquad (2)$$

Però, en ser $X\geq Y\geq Z$ i $X'\leq Y'\leq Z'$, tindrem que

$$\frac{X}{X'}\geq\frac{Y}{Y'}\geq\frac{Z}{Z'}\,,$$

i

$$\begin{aligned}&\frac{X}{X'}\,(Y'-X')+\frac{Y}{Y'}\,(Z'-Y')+\frac{Z}{Z'}\,(X'-Z')=\\ &=\frac{XY'}{X'}-X+\frac{YZ'}{Y'}-Y+\frac{ZX'}{Z'}-Z=\\ &=\frac{XY'}{X'}-X+\frac{YZ'}{Y'}-Y+\frac{ZX'}{Z'}- \qquad (3)\\ &\quad -Z+\frac{YX'}{Y'}-\frac{YX'}{Y'}=\\ &=\left(\frac{X}{X'}-\frac{Y}{Y'}\right)(Y'-X')+\\ &\quad+\left(\frac{Y}{Y'}-\frac{Z}{Z'}\right)(Z'-X')\geq 0\,.\end{aligned}$$

Anàlogament,

$$\frac{X}{X'}\,(Z'-X')+\frac{Y}{Y'}\,(X'-Y')+ \\ +\frac{Z}{Z'}\,(Y'-Z')\geq 0\,. \qquad (4)$$

i, en sumar les desigualtats (3) i (4) obtenim (2) i, per tant, (1).

D'ara en endavant suposarem sense pèrdua de generalitat que $a\geq b\geq c$. Això i el fet que a, b i c són costats d'un triangle, que fa que $a+b>c$, que $b+c>a$ i que $c+a>b$, dóna

$$(a-b)(a+b-c)>0\,,\quad (b-c)(b+c-a)>0$$

i, per tant,

$$c^2+ab\leq b^2+ca\leq a^2+bc.$$

A més,

$$a+b\geq c+a\geq b+c$$

i podem, doncs, aplicar la desigualtat (1) amb

$$X=\frac{a+b}{c^2+ab}\,,\quad Y=\frac{c+a}{b^2+ca}\,,\quad Z=\frac{b+c}{a^2+bc}$$

i

$$X'=c\,,\quad Y'=b\,,\quad Z'=a$$

per obtenir

$$\frac{a+b}{c^3+abc}+\frac{b+c}{a^3+abc}+\frac{c+a}{b^3+abc}\geq \\ \geq 3\,\frac{\dfrac{a+b}{c^2+ab}+\dfrac{c+a}{b^2+ca}+\dfrac{b+c}{a^2+bc}}{a+b+c}\,. \qquad (5)$$

Ara tornem a aplicar la desigualtat (1), però amb

$$X=a+b\,,\quad Y=c+a\,,\quad Z=b+c$$

i

$$X'=c^2+ab\,,\quad Y'=b^2+ca\,,\quad Z'=a^2+bc\,.$$

Resulta

$$\frac{a+b}{c^2+ab}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{b+c}{a^2+bc}\geq \\ \geq 3\,\frac{2(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \qquad (6)$$

i, per tant, en substituir (6) a (5), obtenim

$$\frac{a+b}{c^3+abc}+\frac{b+c}{a^3+abc}+\frac{c+a}{b^3+abc}\geq \\ \geq\frac{18}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

i, finalment, com que $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$, tindrem que

$$\frac{a+b}{c^3+abc}+\frac{b+c}{a^3+abc}+\frac{c+a}{b^3+abc}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$$

i, per tant, basta demostrar que

$$a^2+b^2+c^2 \le 9R^2\,.$$

Però, pel teorema dels sinus, tenim que

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

i, per tant,

$$\frac{a}{2R}=\sin A\,,\quad \frac{b}{2R}=\sin B\,,\quad \frac{c}{2R}=\sin C$$

i, aleshores, tenim

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$$

i el que volem demostrar s'expressa ara així:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}\,.$$

Ara, fent servir que $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ i posant $\cos A$, $\cos B$ i $\cos C$ en funció dels costats del triangle, segons el teorema del cosinus, es pot comprovar, després de llargs càlculs, que

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C\,.$$

Si el triangle és obtusangle, $\cos A\cos B\cos C<0$. Altrament, usant la desigualtat entre les mitjanes geomètrica i aritmètica i la convexitat de la funció cos a l'interval $[0,\pi/2]$, obtenim que

$$\cos A\cos B\cos C\le\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\le$$
$$\le\left[\cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\right]^3=\cos^3\frac{\pi}{3}=\frac{1}{8}$$

i, per tant,

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=$$
$$=2+2\cos A\cos B\cos C\le 2+2\,\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$$

tal com volíem demostrar.

La igualtat s'esdevé quan el triangle és equilàter.

A98. (Proposat per Enric Ventura, UPC, Manresa.) Quins són els deu primers decimals de $\sqrt[0,0000000001]{0,0000000001}$? I els de $\sqrt[1,0000000001]{1,0000000001}$?

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva..) Tenim

$$\sqrt[0,0000000001]{0,0000000001}=$$
$$=0,0000000001^{\frac{1}{0,0000000001}}=0,0000000001^{10^{10}}.$$

Observem que només que elevem 0.0000000001 al quadrat ja obtenim un nombre amb $2\cdot 10=20$ decimals (19 zeros i un u) i, com és obvi, en elevar a 10^{10} obtindrem un nombre amb $10^{10}\cdot 10=10^{11}$ decimals, que seran tots zeros menys l'últim, que serà un u. Per tant, els deu primers decimals de $\sqrt[0,0000000001]{0,0000000001}$ són tots zeros.

Quant a la segona qüestió, tenim

$$\sqrt[1,0000000001]{1,0000000001}=$$
$$=1,0000000001^{\frac{1}{1,0000000001}}.$$

Considerem ara la funció $f(x)=a^x$, amb $a>1$. És clar que, per a tot $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=a^x\ln a>0$ i, per tant, la funció és creixent a tot $\mathbb{R}$. Això vol dir que, si $0<b<1$, aleshores, $a^0=1<a^b<a^1$ i, si apliquem aquesta desigualtat amb $a=1,0000000001$ i $b=1/1,0000000001<1$, tindrem

$$1<1,0000000001^{\frac{1}{1,0000000001}}<1,0000000001\,,$$

cosa que mostra que els deu primers decimals de

$$\sqrt[1,0000000001]{1,0000000001}=$$
$$=1,0000000001^{\frac{1}{1,0000000001}}$$

són tots zeros.

A99. (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals positius i sigui $x>0$.

a) Proveu que la sèrie $\sum\dfrac{a_1\cdots a_{n-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}$ és convergent.

b) Proveu que, si $\sum\frac{1}{a_n}$ divergeix, aleshores

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1\cdots a_{n-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}=\frac{1}{x}\,.$$

Solució: (Solució del proponent.) En primer lloc, demostrarem que

$$\frac{a_1\cdots a_n}{(x+a_1)\cdots(x+a_{n+1})}=$$
$$=\frac{a_1\cdots a_n}{x(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-$$
$$-\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{x(x+a_1)\cdots(x+a_{n+1})}\,,$$

amb la qual cosa la sèrie serà telescòpica. En efecte,

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1\cdots a_n}{x(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-\\
&\quad-\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{x(x+a_1)\cdots(x+a_{n+1})}=\\
&=\frac{a_1\cdots a_n(x+a_{n+1})-a_1\cdots a_{n+1}}{x(x+a_1)\cdots(x+a_{n+1})}=\\
&=\frac{a_1\cdots a_n x}{x(x+a_1)\cdots(x+a_{n+1})}=\\
&=\frac{a_1\cdots a_n}{(x+a_1)\cdots(x+a_{n+1})}\,.
\end{aligned}$$

Així, tenim que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1\cdots a_{n-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}=\\
&\quad=\frac{1}{x}-\frac{a_1\cdots a_N}{x(x+a_1)\cdots(x+a_N)}=\\
&\quad=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n}{x+a_n}\right)
\end{aligned}$$

i, quan $N\to\infty$, aquest productori convergeix, ja que tots els factors són més petits que 1. Per tant, la sèrie és convergent, i

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1\cdots a_{n-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{x+a_n}\right).$$

Aquest productori és zero si, i només si, el seu invers és divergent, és a dir, si, i només si,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{x+a_n}\right)^{-1}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)$$

divergeix. Però

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{x}{a_n}\right)\right),$$

per tant, el productori divergeix si, i només si, aquesta sèrie divergeix. Finalment, com que $\log(1+x)\sim x$, la sèrie divergeix si, i només si, $\sum\frac{x}{a_n}$ divergeix, i el productori inicial val zero si, i només si,

$$\sum\frac{1}{a_n}$$

divergeix, tal com volíem veure.

A100. (Proposat per Pelegrí Viader i Canals, UPF, Barcelona.) Fent servir únicament una moneda, com poden, tres amics, decidir qui paga les begudes?

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva.) És clar que, amb una sola moneda, només podem fer sèries de diverses tirades i assignar resultats que tinguin la mateixa probabilitat a cadascun dels amics. Però això és impossible, perquè amb n tirades tenim 2^n resultats, quantitat que no és mai múltiple de tres.

Això no obstant, tenim una manera fàcil de resoldre l'embolic: tirem la moneda dues vegades:

Si surt *cara-cara*, paga l'Albert
Si surt *cara-creu*, paga en Bernat
Si surt *creu-cara*, paga en Carles
Si surt *creu-creu*, tornem a començar

És realment poc probable que ens hàgim de passar la tarda tirant monedes a causa d'una insistent freqüència de «creu-creu», «creu-creu», «creu-creu», etc. I si tal cosa s'esdevé, aleshores és força probable que la moneda estigui trucada i llavors podem:

a) Regalar la moneda al mag que treballa al local a canvi que ens pagui la ronda.

b) Reptar l'amo del bar a regalar-nos la ronda si surten dues creus.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga